Burmistrova O.N., Timokhova O.M.

PASSAGE OF A RANDOM SIGNAL VIA A MECHANICAL SYSTEM LESOTRANSPORTNYH MACHINES

Burmistrova O. N., Russia, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor

Timokhova O. M., Russia, Candidate of Technical Sciences, Federal State Educational Institution of Higher Professional Education "Ukhta State Technical University"

Abstract

The article deals with the mechanical system lesotransportnyh machines with passing through it random signal. The calculations of the correlation function of a random process with zero expectation. It is found that the spectral characteristics of the output signal linear mechanical system also shows the frequency characteristic of the mechanism. Also, the magnitude of the correlation function gives the value of dispersion of the generalized coordinates, and the spectral density - the distribution of the dispersion on the excitation frequency.

Keywords: correlation functions, linear systems, spectral density, dispersion.

Под термином «сигнал» в дальнейшем будем понимать внешнюю нагрузку, которая приложена к выходным звеньям механизма. Во многих случаях сигнал, поступающий на вход механической системы, представляет собой реализацию некоторого случайного процесса, причем никаких сведений об этой реализации, помимо сведения о статистических свойствах соответствующего случайного процесса не имеется. Так, например, может быть известно, что рассматриваемый процесс является гауссовским и даны его средние значения и корреляционная функция. При таком скудном объеме информации о выходном сигнале не представляется возможным получение более полной информации о сигнале на выходе системы. Возможно лишь определение статистических свойств сигнала на выходе механической системы. Под выходом механической системы будем понимать обобщенную координату, подлежащую измерению.

Как было показано выше, механическая система описывается дифференциальными, в общем случае, нелинейными уравнениями, поэтому исследованию подлежат статистические свойства интегралов дифференциальных уравнений динамики машинных агрегатов по свойствам входных сигналов.

Механическая система, описывающаяся линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, называется стационарной [1]. Для такой системы при помощи преобразования Карсона-Хевисайда можно установить весьма интересное соотношение между передаточной функцией веса.

Изображением или преобразованием некоторой обобщенной координаты *q(t)* действительного переменного *t* называется функция комплексного переменного *P*, определяемая соотношением

$$L\left[q(t)\right]=\xi(p)=p\int_{0}^{\infty}q(t)e^{-pt}dt. \qquad (1)$$

Если *W(P)* – передаточная функция механической системы, то

$$k(t)=\frac{1}{2\pi_i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi(p)e^{pt}dt. \qquad (2)$$

Функция *K(t)* называется функцией веса механической системы.

Если входной сигнал *Q(t)*, то выходная координата механической системы, находившейся в момент t_o в покое, будет равна [2]

$$q(t)=\int_{t_o}^{t}k(t-\tau)Q(\tau)d\tau. \qquad (3)$$

В предельном, когда входной сигнал подан бесконечно давно

$$q(t)=\int_{-\infty}^{t}k(\tau)Q(t-\tau)d\tau. \qquad (4)$$

Будем считать, что входной сигнал является реализацией стационарного случайного процесса, для которого, как известно, [3] математическое ожидание

$$M\left[Q(t)\right]=m_q=Const,$$

поэтому

$$M\left[Q(t)\right] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)Q(t-\tau)d\tau\right]. \qquad (5)$$

Так как суммирования и интегрирования коммутативны, то

$$M\left[Q(t)\right] = m_q \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)d\tau.$$

Поскольку для устойчивой по Ляпунову механической системы

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)d\tau = \alpha_o = Const < \infty,$$

то

$$M\left[q(t)\right] = \alpha_0 m_q, \qquad (6)$$

то есть среднее значение обобщенной координаты в установившемся режиме $(t \rightarrow \infty)$ пропорционально среднему значению обобщенной силы.

Определим корреляционную функцию случайного процесса при нулевом матожидании

$$R_q(t_1, t_2) = M\left[q(t_1)q(t_2)\right] = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi)Q(t_1-\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)Q(t_2-\eta)d\eta\right].$$

После простых линейных преобразований получим:

$$R_q(t_1 - t_2) = R_q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta) R_Q(\tau + \eta - \xi) d\eta d\xi,$$

где $R_Q(\tau)$ – автокорреляционная функция случайного сигнала. Известно [4], что спектральная плотность $S_i(\tau)$ и корреляционная функция $R_i(\tau)$ связаны соотношениями

$$S_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_j(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$
$$R_j(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_j(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \qquad (7)$$

То есть, связь между $S(\omega)$ и $R(\tau)$ определяет преобразование Римана-Меллина в форме Фурье.

Если $S_Q(\omega)$ - спектральная плотность сигнала Q на входе системы, то, как показано в [4], спектральная плотность $S_q(\omega)$ на выходе механической системы определяется соотношением:

$$S_q(\omega) = \left|W(j\omega)\right|^2 S_Q(\omega), \qquad (8)$$

где $\left|W(j\omega)\right|^2 = A^2(\omega)$ - квадрат модуля частотной характеристики линейной системы.

Из выражения (8) ясно, что спектральная плотность выходного (измеряемого) сигнала зависит не только от нагрузки, но и от динамических свойств механической системы.

Во многих случаях на вход механизмов лесовозных машин поступает сигнал, дисперсия которого достигает больших значений. По своей природе такой сигнал близок к так называемому «белому шуму», имеющему функцию

$R_Q(\tau) = F\delta(\tau),$

где F – интенсивность белого шума, $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Согласно (7) спектральная плотность входного сигнала

$$S_Q(\omega) = F\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = F = Const. \qquad (9)$$

В этом случае спектральная плотность выходной координаты q определяется выражением (8) с учетом (9)

$$S_q(\omega) = A^2(\omega)F, \qquad (10)$$

Дисперсия $D[q]$ выходного сигнала является конечной величиной и также зависит от свойств механизма

$$D[q(t)] = R_q(0) = F\int_{-\infty}^{\infty}[k(\xi)]^2 d\xi = d_1 F,$$

где

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty}[k(\xi)]^2 d\xi = Const,$$

Таким образом, дисперсия обобщенной координаты механической системы в случае, если

$\int_{-\infty}^{\infty}[k(\xi)]^2 < \infty$ ограничена постоянной $\alpha_1 F$.

В некоторых случаях при потере устойчивости

$$\int_{-\infty}^{\infty}[k(\xi)]^2 d\xi = \infty,$$

поэтому дисперсия выходного сигнала теоретически может быть бесконечно большой.

Приближенное представление входного сигнала в качестве «белого шума» дает широкие перспективы для анализа линейных механических систем.

Одно из основных свойств спектральной плотности

$$\sigma^2 = D[q(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega < \infty$$

позволяет судить о частотах, или об интервалах частот, которые вносят наибольший вклад в дисперсию выходного сигнала.

Из формулы (10) видно, что спектральная плотность выходного сигнала зависит от амплитудной частотной характеристики механизма. Если квадрат $A(\omega)$ имеет резкие подъемы в области некоторых частот, то это немедленно отражается на дисперсии выходного сигнала.

Таким образом, спектральная характеристика выходного сигнала линейной механической системы позволяет судить, в частности, и о частотной характеристике механизма.

Величина корреляционной функции $R_q(0)$ дает значение дисперсии обобщенной координаты $q(t)$, а спектральная плотность – как бы распределение (плотность) дисперсии по частотам возбуждения.

На остальных характеристиках линейных систем (взаимной корреляционной функции, взаимной спектральной плотности и др.) и их физической трактовке останавливаться пока не будем.

References

[1] Arnold V. I. Mathematical methods of classical mechanics. - M.: Nauka, 1974. - 431s.
[2] Shilov G. E. Mathematical analysis. Special course. – M.: Fizmatgiz, 1961. - 456s.
[3] Roĭtenberg Y. N. Automatic control. – M.: Nauka, 1971. - 365s.
[4] Sveshnikov A. A. Applied methods of the theory of random functions. - M.: Nauka, 1968. - 464s.