PHYSICAL AND MATHEMATIC SCIENCES

Cherkunova N.G.

APPLIED ASPECTS OF MATHEMATICAL MODELING

Cherkunova N.G., Associate-Professor, Candidate of Phisical and Mathematical Sciences. The Republic of Khakassia, Russian Federation. The Khakas Technical Institute.

Abstract

The paper discusses the history and statistics of the spread of epidemics. The giren mathematical model of the temporary dependence of the parameters characterises the spread of infectious diseases in the case when the coefficients of morbidity and recovery are different. This model helps to find time moment when the number of infectious diseases would be maximized.

Keywords: infectious diseases, incidence rates and recovery.

Введение

Инфекционные заболевания на протяжении многих столетий остаются наиболее опасными болезнями, которые ежегодно уносят большое количество жизней.

Полиомиелит сопровождал человечество на протяжении тысячелетий, парализуя и убивая тысячи детей. На сегодняшний день не существует эффективного лекарственного препарата от полиомиелита, хотя врачи постоянно совершенствуют вакцину, которая была выпущена в начале 1950-х годов. [1]

Человечество страдает от заболевания сыпным тифом на протяжении веков, причем тысячи людей стали его жертвами. В ходе 30-летней войны в Европе (1618-1648 гг.) тиф, чума и голод унесли жизни 10 миллионов человек. Во время Первой мировой войны это заболевание унесло несколько миллионов жизней в России, Польше и Румынии. Появление вакцины против тифа во время Второй мировой войны помогло эффективно ликвидировать заболевание в развитых странах мира. Однако, вспышки все еще имеют место в некоторых частях Южной Америки, Африки и Азии. [2]

Когда европейцы занялись «импортом» африканских рабов в Америку, они также привезли с собой помимо ряда новых болезней и желтую лихорадку. Эта болезнь разрушала целые города. Несмотря на вакцинацию и улучшение методов лечения, эпидемия по сей день периодически вспыхивает в Южной Америке и Африке. [3]

Появление СПИДа в 1980-х годах привело к глобальной пандемии, поскольку с 1981 года погибло более 25 миллионов человек. Согласно последним статистическим данным, в настоящее время на планете проживает 33,2 миллиона ВИЧ-инфицированных людей и лекарств от СПИДа не существует, однако, есть некоторые препараты, которые могут не дать ВИЧ трансформироваться в СПИД. [4]

В течение 19 века торговцы непреднамеренно экспортировали смертельный вирус холеры из Индии в города Китая, Японии, Северной Африки, Ближнего Востока и Европы. Зарегистрировано 6 пандемий, которые убили миллионы людей. На протяжении десятилетий, казалось, что холера уходит в прошлое. Однако новый штамм холеры возник в 1961 году в Индонезии и распространился на большую часть мира. [5]

Туберкулез «разорял» человеческую популяцию на протяжении всей истории. Древние тексты подробно рассказывают о том, как увядали жертвы заболевания, а ДНК-тестирование выявляло наличие туберкулеза даже у египетских мумий. Несмотря на современные методы лечения, туберкулез продолжает поражать 8 миллионов человек ежегодно, при этом смертельный исход случается в 2 миллионах случаев. Болезнь вернулась в 1990-х годах, главным образом «благодаря» глобальной бедности и появлению новых, устойчивых к антибиотикам штаммов туберкулеза. [6]

Конкретные цифры, говорящие о последствиях первых вспышек малярии, трудно найти. Но проследить воздействие малярии на человека можно, изучая страдающие от болезни регионы. К концу Второй мировой войны Всемирная организация здравоохранения активно начала бороться с заболеванием во всем мире. Полученные результаты не были однозначными, однако, стоимость проекта, война, появление устойчивого к лекарствам нового вида малярии и устойчивых к инсектицидам комаров, в конечном итоге, привели к отказу от проекта. Сегодня малярия по-прежнему создает проблемы в большинстве стран мира, особенно в странах Африки. [7]

Эпидемия чумы считается первой пандемией чумы, которая убила половину населения Европы в 1348 году и уничтожила часть населения Китая и Индии. Это заболевание «разорило» множество городов, постоянно меняло структуру классов, повлияло на глобальную политику, торговлю и общество. Сегодня чума по-прежнему с нами. Современная медицина позволяет вылечить заболевание на ранних стадиях, поэтому угроза смерти значительно ниже. [8]

Когда европейцы прибыли в Америку, они привезли с собой множество болезней, иммунитета или защиты к которым у коренных народов не было. Основным среди этих заболеваний была оспа. Несмотря на создание вакцины в 1796 году, эпидемия оспы продолжала распространяться. В 1967 году, вирус убил более двух миллионов людей, а миллионы людей во всем мире сильно пострадали от заболевания. [9]

Эболавирус - род вирусов из семейства филовирусов, вызывающих геморрагическую лихорадку Эбола у высших приматов. Род эболавирус делится на пять видов. Человека поражают только 4 вида. Заирский эболавирус считается типовым видом рода. Он вызывает наибольшее количество вспышек заболевания и имеет самый высокий процент летальности, достигающий 90%. Специального лечения геморрагической лихорадки Эбола или вакцины против неё до сих пор не существует.

Процессы глобализации привели к тому, что ряд инфекций стали приобретать характер пандемий, влиять на мировое сообщество в целом, наносить значительный экономический и социальный ущерб. Поэтому эта проблема давно переросла государственные границы и стала заботой всего мирового сообщества, но, несмотря на колоссальные усилия человечества, она далека от разрешения. Таким образом актуальность различных исследований по этой проблеме не вызывает сомнений.

Математическое моделирование распространения эпидемий

Для исследования процесса распространения эпидемий составим дифференциальные уравнения – это частный случай того множества математических моделей, которые могут быть построены при изучении окружающего нас мира. [10]

Рассмотрим выборку из n человек:

$$n = x(t) + y(t) + z(t),$$

где x(t) - количество инфекционных больных, которые сами больны и являются источником распространения болезни в момент времени t;

y(t) – количество восприимчивых к данной болезни, но здоровых в момент времени t;

z(t) – количество здоровых и обладающих иммунитетом к данной болезни в момент времени t.

Так как неизвестны законы, позволяющие составить уравнения рассматриваемого процесса, поэтому необходимо выдвинуть различные предположения (гипотезы), касающиеся его протекания при малых изменениях переменных.

Предположим, что если x(t) превосходит некоторое пороговое значение X, т.е. x(t)>X, то скорость изменения восприимчивых к болезни dy/dt пропорциональна их количеству y(t):

$$\frac{dy}{dt} = -ay \qquad (1),$$

тогда скорости изменения инфицированных dx/dt и здоровых dz/dt будут равны

$$\frac{dx}{dt} = ay - bx \qquad (2),$$

$$\frac{dz}{dt} = bx \qquad (3),$$

где ay, bx – число вновь заболевших и выздоравливающих;

a, b – коэффициенты заболеваемости и выздоровления

.

Если $x(t) \leq X$, то $\dfrac{dy}{dt} = 0$ и заражения болезнью со временем не будет происходить, т.к. большинство инфекционных больных находится в изоляции [11].

Пусть коэффициенты заболеваемости и выздоровления различны, т.е. $a \neq b$.

Предположим, что в начальный момент времени (t = 0) $y(t) = y(0), x(t) = x(0), z(t) = z(0) = 0$.

Рассмотрим случай, когда x(0)>X, так как x(t) непрерывная функция, то найдется интервал [0; $t_{кр}$), в котором x(t)>X. В момент времени $t_{кр}$ заражаемость восприимчивых к болезни прекращается, т.е. эпидемия прекращается.

В уравнении (1), разделяя переменные

$$\frac{dy}{y} = -adt$$

и интегрируя, получаем $\ln|y| = -at + c$, откуда находим

$$y(t) = e^{c} \cdot e^{-at}.$$

С учетом начальных условий получаем искомый закон изменения числа восприимчивых к болезни в зависимости от времени

$$y(t) = y(0) \cdot e^{-at}.$$

Подставляя найденное y в уравнение (2), получаем линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$x' + bx = ay(0) \cdot e^{-at}.$$

Заменяя $x(t)$ произведением двух вспомогательных функций $x(t) = uv$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} v' + bv = 0 \\ u'v = ay(0) \cdot e^{-at} \end{cases}$$

Разделяя переменные в 1-ом уравнении системы

$$\frac{dv}{v} = -bdt$$

и интегрируя полученное выражение, находим вспомогательную функцию v

$$v = e^{-bt}.$$

Подставляя найденное значение v во 2-е уравнение системы, разделяя переменные и интегрируя, получаем вспомогательную функцию u

$$u = \frac{ay(0)}{b-a} e^{(b-a)t} + c_1.$$

С учетом начальных условий (при t = 0, x(t) = x(0)), получаем искомый закон изменения числа инфекционных больных в зависимости от времени

$$x(t) = \frac{ay(0)}{b-a}\left(e^{(b-a)t} - e^{-bt}\right) + x(0)e^{-bt} \qquad (4).$$

Количество здоровых в момент времени t определяется из формулы

$$z(t) = n - x(t) - y(t).$$

Найдем момент времени $t_{\max}$, при котором число инфекционных больных будет максимальным.

Дифференцируя уравнение (4) получаем уравнение

$$\frac{ay(0)}{b-a}\left(be^{-bt} - ae^{-at}\right) - bx(0)e^{-bt} = 0,$$

решая которое находим искомый момент времени $t_{\max}$, при котором число инфекционных больных будет максимальным:

$$t_{\max} = \frac{\ln\left(aby(0) - b^2x(0) + abx(0)\right) - \ln a^2 y(0)}{b-a}.$$

Результаты обсуждения

В результате проделанной работы были получены следующие результаты:

- построена математическая модель, связывающая скорость изменения числа восприимчивых к болезни, здоровых и обладающих иммунитетом к данной болезни и инфекционных больных со временем для случая, когда коэффициенты заболеваемости и выздоровления различны, т.е. $a \neq b$;

- для случая $a \neq b$ получены законы изменения числа здоровых и обладающих иммунитетом, числа восприимчивых к болезни и инфекционных больных в зависимости от времени;

- при $a \neq b$ найден момент времени, при котором число инфекционных больных будет максимальным.

References

[1] Murray D., Infectious diseases in children // Practice, M., 2006. - 928 p.
[2] Timakov V.D., Levashev V.S., Borisov L.B. Microbiology // Medicine, Moscow, 1983. - 517 p.
[3] Smorodintsev A.A., Talking about viruses // Eureka, M., 1982.- 207 p.
[4] Haitov R.M., Ignatieva G.A. AIDS // People's Academy of Culture and human values, M., 1992. - 352 p.
[5] Zlatogorov S.I.Epidemiology and microbiology of cholera // M., 1947. - 430 p.
[6] Samzov A.V., Barbin V.V. Skin and venereal disease // ELBI, M., 2002. - 314 p.
[7] Greenwood B.M., Bojang K., Whitty C.J., Targett G.A. Malaria // 2005. - 150 p.
[8] Domaradsky I.V. Plague // Medicine, Moscow, 1998. - 120 p.
[9] Kazantsev A.P., Matkovskiy V.S. Handbook of Infectious Diseases // Medicine, Moscow, 1985. - 320 p.
[10] Cherkunova N.G., Novoselov I.A. Differential patterns that determine the effectiveness of advertising, supply and demand // Proceedings of the International scientific and practical conference "Analysis of modern economic processes and information technology", Dnipropetrovsk v. 4, 2011. p. 101 – 103.
[11] Braun m. Differential equation models // springer, new york, 1983. - 380 p.